Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca,
Facultatea de Matematică şi Informatică

Contribuţii la studiul laticii subgrupurilor unui grup

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător ştiinţific
Prof. Dr. Grigore Călugăreanu

Doctorand
Carolina Conţiu

Cluj-Napoca, 2011

CUVINTE CHEIE: laticea subgrupurilor unui grup, laticea subgrupurilor normale ale unui grup, element ciclic, complex, sistem bazic, grup liber, subgrup comutator, grup abelian liber, grup abelian, latice modulară, proiectivitate, latice reprezentabilă prin latici de subgrupuri de grupuri abeliene, latice cu o reprezentare de tip 1, latice arguesiană.

Cuprins

Prefaţă

Studiul laticilor, în general, îşi are originile la sfârşitul secolului 19. Investigând algebrele Booleene, Charles S. Pierce şi Ernst Schröder au simţit nevoia introducerii conceptului de latice. Independent, studiind idealele inelului întregilor, Richard Dedekind a ajuns la aceeaşi descoperire. Mai mult, Dedekind a ajuns la concluzia că laticea acestora satisface o anumită lege. Este vorba despre ceea ce numim astăzi legea modulară (numită, dealtfel, şi legea Dedekind).

Teoria laticilor a fost folosită în elaborarea unora dintre teoremele de structură de bază din teoria grupurilor, şi a sistemelor algebrice, în general. De exemplu, Øystein Ore a dat în 1935 o demonstraţie pur laticeală pentru teorema Krull-Schmidt, de unicitate a descompunerilor directe.

Totuşi, studiul legăturii dintre un grup şi laticea subgrupurilor sale a început în 1928 cu lucrarea Adei Rottlaender ([45]), motivată fiind de corespondenţa Galois dintre extinderea unui corp şi grupul Galois al acesteia. A urmat o serie lungă de algebrişti care s-au ocupat de studiul laticii subgrupurilor. Printre aceştia s-au remarcat Reinhold Baer, Øystein Ore, Kenkichi Iwasawa, Leonid Eftimovich Sadovskii, Michio Suzuki, Giovanni Zacher, Roland Schmidt şi mulţi alţii.

Până acum 20 de ani, singura carte (monografie) de referinţă în acest domeniu, a fost cea a lui Suzuki, [53]. În 1994, Roland Schmidt a alcătuit o monografie ([49]) dedicată acestui subiect.

Dacă G este un grup, cu $L(G)$ notăm laticea subgrupurilor sale. Aceasta este întotdeauna o latice completă şi compact generată. Printre primele şi cele mai importante probleme care s-au ridicat în studiul laticii subgrupurilor, au fost:

(A) *Fiind dată o clasă $\mathcal{X}$ de grupuri, ce proprietăţi au laticile izomorfe cu laticea subgrupurilor unui grup din $\mathcal{X}$*? Invers, *fiind dată o clasă de latici $\mathcal{Y}$, ce putem spune despre clasa de grupuri (în cazul în care astfel de grupuri există) a căror latice a subgrupurilor aparţine clasei $\mathcal{Y}$*?

(B) *Care dintre latici sunt izomorfe cu laticea subgrupurilor unui grup (abelian)?*

După cum vom vedea, există latici care nu sunt izomorfe cu laticea subgrupurilor a niciunui grup, iar pe de altă parte, există latici care sunt izomorfe cu laticea subgrupurilor exact a unui grup sau a mai multor (chiar a unei infinităţi de) grupuri.

Două grupuri cu laticile subgrupurilor izomorfe se numesc proiective. Se ridică o nouă problemă.

(C) *Care grupuri G sunt determinate de proiectivităţi, cu alte cuvinte pentru orice grup G' şi orice proiectivitate de la G la G', avem $G \cong G'$?*

În paralel cu studiul laticii subgrupurilor, s-a dezvoltat şi studiul laticii subgrupurilor normale. Aceasta este o sublatice modulară a laticii subgrupurilor.

Prezentăm în continuare conţinutul acestei teze.

În primul capitol sunt expuse pe scurt noţiuni şi rezultate de bază din domeniu (secţiunile 1.1, 1.2, 1.3, 1.6). În Secţiunea 1.4 am prezentat laticea subgrupurilor normale şi proprietăţile elementare ale acesteia. În Secţiunea 1.7 sunt discutate câteva exemple elementare, majoritatea dintre ele inspirate din monografia lui Roland Schimdt, [49]. Secţiunea 1.5 este dedicată studiului proiectivităţilor şi în special problemei (C), enunţate mai sus. S-a observat că atunci când un grup nu poate fi determinat de proiectivităţi, există totuşi posibilităţi pentru ca laticea subgrupurilor sale (normale) să îl determine. O primă posibilitate ar fi să restrângem clasa tuturor grupurilor la o clasă specifică, adică G este determinat de proiectivităţi în clasa $\mathcal{C}$, dacă $G \in \mathcal{C}$ şi pentru orice grup $G' \in \mathcal{C}$ proiectiv cu G, avem $G \cong G'$. A doua posibilitate ar fi ca grupul să fie determinat de laticea subgrupurilor (normale) ale unui alt grup (care să fie construit pornind de la cel iniţial). În Secţiunea 1.5.3 este prezentat un scurt inventar al rezultatelor în aceste direcţii, precum şi o abordare originală a acestei probleme. Această abordare a fost publicată în [9].

În cel de-al doilea capitol oferim o soluţie pentru problema (B), mai sus enunţată, adică prezentăm condiţii în care o latice este izomorfă cu laticea subgrupurilor unui grup abelian. Problema determinării de condiţii în care o latice să fie izomorfă cu laticea subgrupurilor unui grup a fost demarată de Suzuki în monografia sa. În Secţiunea 2.1 prezentăm pe scurt condiţiile necesare pentru ca o latice să fie izomorfă cu laticea subgrupurilor unui grup abelian de torsiune, formulate de Benabdallah şi Piché în [4]. Cel care a formulat o soluţie completă pentru laticea subgrupurilor unui grup oarecare a fost Yakovlev în [54] (1974). Acesta a oferit o descriere laticeală a elementelor, precum şi a multiplicării acestora într-un grup liber de rang ≥ 2. Mai mult, Yakovlev a reuşit să identifice subgrupurile normale în laticea subgrupurilor unui astfel de grup. Aşadar, soluţia finală este o consecinţă directă a faptului că orice grup este imaginea omomorfă a unui grup liber şi a teoremei de corespondenţă pentru grupuri. În aceeaşi manieră, Scoppola a reuşit în [50] (1981), respectiv [51] (1985), să caracterizeze laticea subgrupurilor unui grup abelian fără torsiune de rang ≥ 2, respectiv a unui grup abelian cu rangul fără torsiune ≥ 2. Rezultatele lui Scoppola au fost sintetizate în Secţiunea 2.4. Folosind aceleaşi tehnici, vom da o soluţie completă în ceea ce priveşte laticea subgrupurilor unui grup abelian.

Aceasta se bazează pe caracterizarea laticeală a subgrupului comutator într-un grup liber şi pe faptul că orice grup abelian liber se obţine prin factorizarea unui grup liber cu subgrupul său comutator. În acest scop, în Secţiunea 2.2, vom prezenta instrumentele de care avem nevoie. Marea majoritate a acestora au fost introduse de Yakovlev în [54]. Pentru completitudine, în Secţiunea 2.3 am prezentat condiţiile în care o latice este izomorfă cu laticea subgrupurilor unui grup oarecare. În Secţiunea 2.5 vom identifica subgrupul comutator al unui grup liber în laticea subgrupurilor sale. Ca şi Yakovlev, vom lucra într-un cadru mai general, şi anume cel al grupurilor 2-libere. În Secţiunea 2.6 vom prezenta o caracterizare a laticii subgrupurilor unui grup abelian liber de rang ≥ 2, respectiv a unui grup abelian. În Secţiunea 2.7 vom da condiţii necesare şi suficiente pentru ca o latice să fie izomorfă cu laticea subgrupurilor normale ale unui grup oarecare, ca şi o consecinţă directă a rezultatelor lui Yakovlev. Rezultatele din secţiunile 2.5, 2.6 şi 2.7 vor apare în [15].

Condiţiile din Capitolul 2, nu oferă prea multe informaţii aspura unor proprietăţi de bază ale laticii subgrupurilor. Din acest motiv, în Capitolul 3 am prezentat pe scurt câteva proprietăţi de închidere ale clasei $\mathcal{A}$, a laticilor izomorfe cu laticea subgrupurilor unui grup abelian, precum şi a complementarei acesteia în clasa tuturor laticilor. Ne vom concentra atenţia asupra sublaticilor în Secţiunea 3.1, idealelor în Secţiunea 3.2, produselor directe în Secţiunea 3.3 şi a imaginilor omomorfe în Secţiunea 3.4. După cum era de aşteptat, $\mathcal{A}$ nu este închisă faţă de niciuna dintre noţiunile tocmai enumerate. Vom da totuşi condiţii pentru ca toate sublaticile, respectiv idealele unei latici din $\mathcal{A}$ să fie de asemenea în $\mathcal{A}$. Ne vom ocupa şi de laticea idealelor precum şi de cea a congruenţelor în secţiunile 3.5, respectiv 3.6. Deşi relativ simple, aceste observaţii nu apar în literatura de specialitate.

Observaţiile din Capitolul 3 ne conduc la concluzia că $\mathcal{A}$ nu este o varietate, adică închisă faţă de sublatici, produse directe şi imagini omomorfe. Mai mult, $\mathcal{A}$ nu este nici măcar o cvasi-varietate (adică închisă faţă de izomorfisme, sublatici, produse directe, ultraproduse şi conţine laticea trivială). În aceste condiţii, în Capitolul 4 ne-am îndreptat atenţia asupra unei clase mai generale decât $\mathcal{A}$, şi anume $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$, clasa laticilor care se scufundă în laticea subgrupurilor unui grup abelian. În Secţiunea 4.1 vom prezenta pe scurt noţiunile de varietate şi cvasi-varietate. O clasă mai generală decât $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ este cea laticilor cu o reprezentare de tip 1, $\mathcal{T}_1$, adică cele care se scufundă în latici de echivalenţe care comută. Au loc următoarele incluziuni

$$\mathcal{L}(\mathbf{Z}) \subset \mathcal{N}(\text{rep}) \subset \mathcal{T}_1$$

şi niciuna dintre acestea nu este o egalitate. Cu $\mathcal{N}(\text{rep})$ am notat clasa laticilor care se scufundă în laticea subgrupurilor normale ale unui grup oarecare. O clasă şi mai generală decât $\mathcal{T}_1$ este cea a laticilor arguesiene. Legea arguesiană a fost introdusă de Bjarni Jónsson în 1954 (vezi [33]). Aceasta reprezintă translatarea Teoremei lui Desargues din geometria proiectivă în limbaj laticeal. În Secţiunea 4.3 am expus pe scurt proprietăţile acestor latici. În [33], Jónsson a arătat că în prezenţa complementării, reprezentarea de tip 1 şi identitatea arguesiană, devin echivalente. În cele din urmă, în [16], apare rezultatul care identifică cele două concepte şi în acelaşi timp face legătura cu $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$, adică $\mathcal{L}(\mathbf{Z}) = \mathcal{T}_1$ şi aceasta coincide cu clasa laticilor arguesiene, pentru latici modulare complementate. În Secţiunea 4.4, am demonstrat că pentru laticile de lungime ≤ 4, aceste clase coincid, adică are loc egalitatea

$$\mathcal{L}(\mathbf{Z}) = \mathcal{N}(\mathrm{rep}) = \mathcal{T}_1.$$

Rezultatele din această ultimă secţiune vor apare în [14].

În final, doresc să mulţumesc îndrumătorului ştiinţific, d-lui Prof. Dr. Grigore Călugăreanu pentru sprijinul şi îndrumarea pe care mi le-a acordat în elaborarea acestei teze. De asemenea aş dori să aduc mulţumiri colectivului de la Catedra de Algebră, în special d-lui Conf. Dr. Simion Breaz.

Capitolul 1

Noţiuni de bază. Exemple

În acest capitol am reamintit pe scurt noţiuni fundamentale din teoria laticilor, care să permită expunerea proprietăţilor elementare ale laticii subgrupurilor. De asemenea, am prezentat noţiunea de latice a subgrupurilor normale ale unui grup, menţionând proprietăţile elementare ale acesteia. Am expus apoi un scurt inventar al rezultatelor ce vin să răspundă la cele mai uzuale întrebări din domeniu: *Care grupuri sunt determinate în mod unic de laticea subgrupurilor? Cum se reflectă structura (proprietăţile) grupului în structura laticii subgrupurilor şi reciproc? Care dintre latici sunt izomorfe cu laticea subgrupurilor unui grup?*

Conceptele de bază din teoria laticilor au fost preluate din [16], în timp ce majoritatea proprietăţilor laticii subgrupurilor au fost preluate din [49].

În ceea ce priveşte prima dintre problemele mai sus menţionate, în Secţiunea 1.5.3, am prezentat o abordare originală, obţinută de către S. Breaz şi autoarea tezei în [9].

Definiţia 1.0.1 Fie G un grup. Mulţimea subgrupurilor lui G, parţial ordonată de relaţia de incluziune a mulţimilor, este o latice completă, numită *laticea subgrupurilor* lui G, notată $L(G)$.

1.1 Concepte de bază din teoria laticilor

În această secţiune am prezentat câteva noţiuni elementare din teoria laticilor. Acestea au fost organizate în cinci paragrafe. Am expus aşadar noţiunile de *interval*, *lanţ*, *antilanţ*, *atom*, respectiv *coatom*, element *compact* într-o latice. De asemenea, am reamintit noţinile de *lungime*, repectiv *lăţime* a unei latici.

Am prezentat noţiunea de *latice algebrică* (*compact generată*), având în vedere faptul că G. Birkhoff şi O. Frink au caracterizat laticea subgrupurilor unui grup ca fiind o astfel de latice. În Capitolul 3, vom studia închiderea clasei laticilor izomorfe cu laticea subgrupurilor unui grup abelian, faţă de *sublatici* şi *produse directe*, am reamintit cele două noţiuni.

1.2 Scufundări în laticea subgrupurilor

În aceasă secţiune am expus un scurt inventar al rezultatelor legate de scufundări în laticea subgrupurilor. Aşadar, vom vedea că *orice latice se scufundă în laticea subgrupurilor unui grup* (Whitman, 1946), precum şi faptul că *orice latice algebrică este izomorfă cu un interval al laticii subgrupurilor unui grup* (Tuma, 1989).

1.3 Proprietăţi ale laticii subgrupurilor

În această secţiune am prezentat câteva dintre proprietăţile laticii subgrupurilor, determinate de structura grupului şi reciproc. Prima proprietate abordată a fost *modularitatea*, introdusă de Richard Dedekind (1877). Tot Dedekind a arătat că laticea subgrupurilor unui grup abelian este modulară. Reciproca nu are loc, iar clasa grupurilor neabeliene, cu laticea subgrupurilor modulară, a fost complet determinată (Iwasawa în [31] şi Schmidt în [49]).

Următoarea identitate laticeală asupra căreia ne-am oprit, mai puternică decât modularitatea şi introdusă tot de Dedekind, este *distributivitatea.* Am expus rezultatele ce caracterizează clasa grupurilor cu laticea subgrupurilor distributivă (Ore, 1937-1938). Am prezentat, de asemenea, rezultatele lui Baer din 1939, ce oferă o imagine asupra laticii subgrupurilor grupurilor ciclice.

În finalul secţiunii am prezentat o serie de proprietăţi ale grupurilor finite care se reflectă în structura laticii subgrupurilor şi reciproc, majoritatea preluate din [21].

1.4 Laticea subgrupurilor normale

În această secţiune am amintit noţiunea de *latice a subgrupurilor normale* ale unui grup. Reamintim că dacă G este un grup, *laticea subgrupurilor normale* ale lui G, a fost notată $\mathcal{N}(G)$. În cele ce au urmat am prezentat câteva exemple şi proprietăţi elementare ale lui $\mathcal{N}(G)$, inspirate din [49].

1.5 Proiectivităţi

În această secţiune am prezentat noţiunea de *proiectivitate* de la G la G', ca şi în [49], adică un izomorfism laticeal de la $L(G)$ la $L(G')$. Două astfel de grupuri s-au numit *proiective*. Cel mai adesea, două grupuri proiective nu sunt şi izomorfe. Am reamintit câteva exemple în acest sens.

În continuare am prezentat o clasă specială de latici, ce joacă un rol important în studiul laticii subgrupurilor (şi de care ne vom folosi în special în Capitolul 4), cea a laticilor $\mathcal{M}_n$, unde $n \in \mathbb{N}$, constând dintr-un cel mai mic, respectiv cel mai mare element şi n atomi (vezi [43]).

1.5.1 Proiectivităţile grupurilor abeliene

În această secţiune am prezentat un scurt inventar al proiectivităţilor grupurilor abeliene. Frecvent, două grupuri abeliene proiective sunt şi izomorfe.

Am prezentat cazul grupurilor abeliene de torsiune, rezolvat de către Baer în [2]. Două grupuri, de rang fără torsiune ≥ 2 proiective, vor fi şi izomorfe, tot conform rezultatelor lui Baer din 1939. În ceea ce priveşte grupurile abeliene fără torsiune de rang 1, Fuchs în [21], a stabilit condiţiile în care două astel de grupuri proiective sunt şi izomorfe. Recent, Călugăreanu şi Rangaswamy în [13], au rezolvat cazul grupurilor abeliene mixte cu rangul fără torsiune 1.

1.5.2 Clase de grupuri invariante faţă de proiectivităţi

În această secţiune am reamintit *invarianţa unei clase de grupuri faţă de proiectivităţi*. Ca şi în [49], o clasă $\mathcal{C}$ de grupuri este *invariantă faţă de proiectivităţi* dacă pentru orice proiectivitate între două grupuri G şi G', are loc $G \in \mathcal{C} \Rightarrow G' \in \mathcal{C}$.

Am prezentat apoi câteva clase celebre de grupuri invarinate faţa de proiectivităţi, majoritatea acestor exemple fiind preluate din [43].

1.5.3 Grupuri determinate de proiectivităţi

În această secţiune am prezentat condiţii în care un grup este determinat de laticea subgrupurilor (eventual normale) ale unui alt grup. Ca şi în [49], spunem că un grup G este *determinat de proiectivităţi* dacă pentru orice grup H şi pentru orice proiectivitate $\varphi : L(G) \to L(H)$, are loc $G \cong H$.

În [9] S. Breaz în colaborare cu autoarea tezei, au expus un punct de vedere asupra modalităţilor de a determina un grup (abstracţie făcând de un izomorfism) folosind latticea subgrupurilor. De-a lungul acestui paragraf, am prezentat această abordare.

Cu Grp s-a notat clasa tuturor grupurilor, cu Ab clasa tuturor grupurilor abeliene, cu Ab_p clasa tuturor p-grupurilor abeliene, iar cu Lat clasa tuturor laticilor.

O primă posibilitate pentru ca laticea subgrupurilor să determine un grup ar fi să restrângem clasa tuturor grupurilor la subclase specifice. În felul acesta, laticea subgrupurilor ar putea determina anumite grupuri. De exemplu, R. Baer a demonstrat în [2] că un p-grup abelian, A, este determinat de $L(A)$ în Ab_p. În general, acest lucru nu se întâmplă nici măcar în clasa p-grupurilor, cu laticea subgrupurilor modulară (a se vedea [3]).

Cea de-a doua posibilitate ar fi să determinăm grupul pornind de la laticea subgrupurilor (normale) ale unui alt grup. De exemplu, dacă $A \in Ab$, iar $G \in Grp$ astfel încât $L(\mathbb{Z} \times A) \cong L(\mathbb{Z} \times G)$ (sau $\mathcal{N}(\mathbb{Z} \times A) \cong \mathcal{N}(\mathbb{Z} \times G)$) atunci $A \cong G$. În paragrafele următoare am prezentat câteva rezultate, valorificând ambele posibilităţi, atât pentru laticea subgrupurilor, cât şi pentru laticea subgrupurilor normale. În acest scop s-a introdus următoarea definiţie.

Formalizarea abordării

Definiţia 1.5.1 [9] Fie $\mathcal{S} : Grp \to Lat$ astfel încât $\mathcal{S}(G)$ să fie o sublatice a lui $L(G)$, pentru orice $G \in Grp$. Dacă $V : Grp \to Grp$ este o funcţie, iar $\mathcal{C}$ este o clasă de grupuri, vom spune că un grup $G \in \mathcal{C}$ este *determinat de V şi $\mathcal{S}$-proiectivităţi în $\mathcal{C}$* dacă

$$H \in \mathcal{C} \text{ şi } \mathcal{S}(V(G)) \cong \mathcal{S}(V(H)) \text{ implică } G \cong H.$$

Dacă $\mathcal{C}$ este clasa tuturor grupurilor, spunem că G este *determinat de V şi $\mathcal{S}$-proiectivităţi*. Spunem că un grup G este *determinat de $\mathcal{S}$-proiectivităţi* dacă este determinat de 1_{Grp} şi $\mathcal{S}$-proiectivităţi, i.e., $\mathcal{S}(G) \cong \mathcal{S}(H)$ implică $G \cong H$.

Au fost abordarte cele două cazuri: $\mathcal{S}(G) = L(G)$ şi $\mathcal{S}(G) = \mathcal{N}(G)$.

$\mathcal{N}$-Proiectivităţi

În continuare a fost prezentat un scurt rezumat al rezultatelor ce stabilesc condiţiile în care un grup abelian este determinat de laticea subgrupurilor sale normale (rezultate oferite de Brandl în [5], şi de Curzio în [17]).

În ceea ce priveşte aplicaţia V, din Definiţia 1.5.1, am abordat două cazuri: primul

$$V = B \times - : Grp \to Grp,$$

unde B este un grup abelian fără torsiune, iar al doilea

$$V = (-)^n : Grp \to Grp,$$

unde n este un întreg pozitiv.

Această abordare, de a determina un grup folosind laticea subgrupurilor a altor grupuri, a fost folosită de Lukács şi Pálfy în [38], pentru $V(G) = G^2$, şi de Călugăreanu în [12] pentru $V(G) = G^n$. Cazul $V(G) = B \times G$, unde B este un grup fixat, a fost abordat de Călugăreanu şi Breaz în [8]. Am generalizat abordarea din aceste lucrări în următoarea meta-teoremă:

Teorema 1.5.2 [9] *Fie $V : Grp \to Grp$ o funcţie şi $\mathcal{S} : Grp \to Lat$ astfel încât $\mathcal{S}(G)$ este o sublatice a lui $L(G)$, pentru orice $G \in Grp$. Dacă G este un grup, astfel încât există o clasă $\mathcal{C}$ de grupuri cu următoarele proprietăţi:*

(i) $V(G) \in \mathcal{C}$;

(ii) $V(G)$ *este determinat de* $\mathcal{S}$*-proiectivităţi în* $\mathcal{C}$;

(iii) Dacă $\mathcal{S}(V(G)) \cong \mathcal{S}(V(H))$, *atunci* $V(H) \in \mathcal{C}$,

atunci G este determinat de V şi $\mathcal{S}$-proiectivităţi dacă şi numai dacă G este determinat de V, adică are loc implicaţia

$$V(G) \cong V(H) \Rightarrow G \cong H.$$

Această meta-teoremă a fost folosită în articolele menţionate pentru cazul în care $\mathcal{C}$ este clasa grupurilor abeliene, *Ab*. De aceea, pentru a o putea aplica, vom stabili condiţii suficiente pentru ca $V(H)$ să fie abelian, de fiecare dată când $V(G)$ este abelian.

Proprietatea de simplificare. Proprietatea n-rădăcină

Am spus că un grup B are *proprietatea de simplificare (relativ la clasa $\mathcal{C}$)* dacă orice grup $G \in \mathcal{C}$ este determinat de $V = B \times -$ în $\mathcal{C}$, iar pentru un întreg $n > 0$, am spus că grupul A are *proprietatea n-rădăcină*, dacă este determinat de $V = (-)^n$.

Am amintit în continuare, un scurt inventar al grupurilor ce posedă proprietăţile de mai sus. Se ştie că grupurile abeliene de torsiune numărabile şi mixte numărabile, cu rangul fără torsiune 1 au proprietatea pătrat rădăcină. Mai mult, grupurile abeliene cu inelul endomorfismelor semilocal au proprietatea n-rădăcină (a se consulta [20, Propoziţia 4.8]), pentru orice întreg pozitiv $n \geq 2$. Aceste grupuri au fost studiate de Călugăreanu în [11]. Alte grupuri mixte cu proprietatea n- rădăcină au fost studiate de Breaz în [7].

Cazul $\mathcal{S} = L$

Am început prin a prezenta criterii de comutativitate, pentru un grup G, ce se folosesc de laticea subgrupurilor grupului $V(G)$. Pentru cazul $V = K \times -$, criteriul a fost oferit de Breaz şi Călugăreanu în [8] şi se referă la situaţia în care G este un grup oarecare, iar K un grup abelian care nu este de torsiune, respectiv situaţia în care G este un p-grup, iar K un p-grup abelian nemărginit. Pentru cazul $V = (-)^n$, criteriul a fost dat de Lukács E. şi Pálfy, P. în [38] şi se referă la un grup oarecare. Criteriile de comutativitate fiind stabilite, suntem în măsură să oferim o aplicaţie directă a Metateoremei 1.5.2.

Corolarul 1.5.3 [9] *Fie B un grup abelian. Următoarele afirmaţii au loc:*

(a) Dacă B nu este un grup de torsiune, atunci pentru orice grup abelian A şi orice grup G, implicaţia

$$L(B \times A) \cong L(B \times G) \Rightarrow A \cong G$$

are loc dacă şi numai dacă B are proprietatea de simplificare relativ la Ab.

(b) Dacă B este un p-grup nemărginit, atunci pentru orice p-grup abelian A şi orice p-grup G, implicaţia

$$L(B \times A) \cong L(B \times G) \Rightarrow A \cong G$$

are loc dacă şi numai dacă B are proprietatea de simplificare realtiv la Ab.

(c) Dacă $n > 1$ este un întreg, atunci pentru orice grup G, implicaţia

$$L(B^n) \cong L(G^n) \Rightarrow B \cong G$$

are loc dacă şi numai dacă B are proprietatea n-rădăcină.

Cazul $\mathcal{S} = \mathcal{N}$

Pentru laticea subgrupurilor normale am reamintit un criteriu de comutativitate, demonstrat de Breaz în [36], ce se foloseşte de $\mathcal{N}(V(G))$, când $V = B \times -$, unde $B \neq 0$ este un grup abelian fără torsiune. Pentru $\mathcal{S} = \mathcal{N}$, suntem în măsură să oferim în continuare o nouă consecinţa directă a Metateoremei 1.5.2.

Corolarul 1.5.4 [9] *Fie $B \neq 0$ un grup abelian. Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(a) Dacă B este fără torsiune, atunci pentru A grup abelian şi G grup, implicaţia

$$\mathcal{N}(B \times A) \cong \mathcal{N}(B \times G) \Rightarrow A \cong G$$

are loc, dacă şi numai dacă B are proprietatea de simplificare relativ la Ab.

(b) Dacă B este un p-grup, $A \neq 0$ un p-grup abelian şi G un grup, implicaţia

$$\mathcal{N}(B \times A) \cong \mathcal{N}(B \times G) \Rightarrow A \cong G$$

are loc, dacă şi numai dacă B are proprietatea de simplificare relativ la Ab.

(c) Dacă $n > 1$ este un întreg, atunci pentru un grup G implicaţia

$$\mathcal{N}(B^n) \cong \mathcal{N}(G^n) \Rightarrow B \cong G$$

are loc, dacă şi numai dacă B are proprietatea n-rădăcină.

Corolarul 1.5.5 *Fie A un grup abelian. Dacă G este un grup, iar B este un grup abelian cu rangul fără torsiune finit astfel încât $L(B \times A) \cong L(B \times G)$ (sau $\mathcal{N}(B \times A) \cong \mathcal{N}(B \times G)$) atunci există un întreg pozitiv n astfel încât $A^n \cong G^n$.*

O problemă deschisă

În acest paragraf este formulată o conjectură legată de grupurile, B cu proprietatea că dacă $B \times A \cong B \times G$ (şi $A, G \in \mathcal{C}$) implică $A^n \cong G^n$, pentru un întreg pozitiv n. $\mathbb{Z}$ are această proprietate (Hirshon în [27, Teorema 1]), iar grupurile abeliene fără torsiune de rang finit, de asemenea (Goodearl în [23, Teorema 5.1]). Întrebarea *Este posibil ca $L(\mathbb{Z}\times G_1) \cong L(\mathbb{Z}\times G_2)$(sau $\mathcal{N}(\mathbb{Z}\times G_1) \cong \mathcal{N}(\mathbb{Z}\times G_2)$) să implice $G_1^n \cong G_2^n$, pentru un întreg pozitiv $n > 0$?* este naturală. Răspunsul este însă unul negativ, după cum se poate vedea în [6], şi foloseşte clase de grupuri construite în [52] şi [30]. Reamintim în continuare conjectura formulată în [9].

Conjectură: Dacă B este un grup abelian cu rangul fără torsiune finit, iar G_1, G_2 sunt grupuri (nu neaparat abeliene) astfel încât $L(B \times G_1) \cong L(B \times G_2)$ (sau $\mathcal{N}(B \times G_1) \cong \mathcal{N}(B \times G_2)$), atunci există un întreg pozitiv n astfel încât $L(G_1^n) \cong L(G_2^n)$ (respectiv $\mathcal{N}(G_1^n) \cong \mathcal{N}(G_2^n)$).

1.6 Latici izomorfe cu laticea subgrupurilor unui grup

În această secţiune am prezentat câteva observaţii legate de soluţia problemei (B) enunţate în prefaţa acestei teze: *Să se caracterizeze laticile care sunt (sau nu) izomorfe cu laticea subgrupurilor unui grup (abelian).*

B.V. Yakovlev a obţinut în [54], condiţii necesare şi suficiente pentru laticea subgrupurilor unui grup oarecare. Condiţiile oferite de el sunt expuse pe scurt în Capitolul 2. Totuşi, având în vedere complexitatea acestor condiţii, pe cazuri concrete problema de a decide dacă o latice este sau nu laticea subgrupurilor unui grup rămâne dificilă sau chiar imposibilă. În acestă secţiune am rezlovat Exerciţiul 2, pag. 10, din[49], determinând care dintre laticile cu maxim 5 elemente sunt izomorfe cu laticea subgrupurilor a cel puţin unui grup.

1.7 Exemple

În această secţiune am ilustrat câteva exemple remarcabile de latici de subgrupuri. Ne-am oprit asupra grupurilor de forma $\mathbb{Z}(p^n) \oplus \mathbb{Z}(q^m)$, dat fiind că ne vom folosi de laticea subgrupurilor acestora în Capitolul 4. De asemenea, am prezentat laticea p-grupului-cvasicilic, latice folosită frecvent în construcţile din Capitolul 3. Restul exemplelor prezentate în acestă secţiune, şi anume, cazul *grupurilor abeliene elementare*, al *grupurilor de ordin pq*, pentru p şi q prime, al *grupului altern* A_4, al *grupurilor diedrale*, *de cuaternioni* şi al*grupurilor Tarski*, au fost preluate din [49].

Capitolul 2

Condiţii în care o latice este izomorfă cu laticea subgrupurilor unui grup abelian

Acest capitol este dedicat determinării de condiţii necesare şi suficiente pentru ca o latice să fie izomorfă cu laticea subgrupurilor unui grup abelian.

În secţiunile 2.1, respectiv 2.4 am prezentat soluţii parţiale ale acestei probleme, oferite de Benabdallah şi Piché, respectiv Scoppola. În secţiunile 2.5 şi 2.6 am oferit o soluţie completă, în ceea ce priveşte laticea subgrupurilor unui grup abelian. Punctul de plecare în formularea acestor condiţii a fost soluţia oferită de Yakovlev pentru cazul laticii subgrupurilor unui grup oarecare ([54]). De asemenea, principalele instrumente au fost preluate de la Yakovlev şi prezentate în Secţiunea 2.2. Soluţia se bazează pe identificarea subgrupului comutator în cadrul laticii subgrupurilor unui grup 2-liber şi pe caracterizarea laticii subgrupurilor unui grup abelian liber.

În Secţiunea 2.7 am formulat condiţii în care o latice este izomorfă cu laticea subgrupurilor normale ale unui grup oarecare. Rezultatele din secţiunile 2.5, 2.6 şi 2.7 sunt originale şi au fost obţinute de autoarea tezei în [15].

2.1 Condiţii necesare în care o latice este izomorfă cu laticea subgrupurilor unui grup abelian de torsiune

În această secţiune vom face un scurt inventar al condiţiilor necesare pentru ca o latice completă şi modulară să fie laticea subgrupurilor unui grup abelian de torsiune, oferite în lucrarea lui Benabdallah şi Piché, [4]. Acest studiu tratează laticile modulare complete satisfăcând anumite condiţii adiţionale, generalizând noţiuni din teoria grupurilor abeliene.

2.2 Laticea subgrupurilor unui grup liber

În această secţiune am prezentat instrumentele de care vom avea nevoie pentru a formula condiţiile din Secţiunea 2.6. Pentru a ajunge la rezultatul dorit, pornim de la caracterizarea laticii subgrupurilor unui grup liber, formulată de Yakovlev. Ideea lui Yakovlev a fost aceea de a localiza anumite structuri laticeale în mulţimea tuturor subgrupurilor ciclice, care să ofere suficiente informaţii despre generatori şi relaţii.

2.2.1 Elemente ciclice. Complexe.

Marea majoritate a acestor noţiuni au fost introduse de Yakovlev în [54]. De-a lungul acestei secţiuni cu $L = (L, \leq) = (L, \vee, \wedge)$ am notat o latice completă, iar cu 0 cel mai mic element al său.

Elemente ciclice

Un element $a \in L$ se numeşte *ciclic* dacă intervalul $a/0$ este o latice distributivă ce satisface condiţia lanţurilor ascendente. Cu $C(L)$ sau simplu C, când nu e pericol de confuzie, s-a notat mulţimea tuturor elementelor ciclice din L. Am reamintit următoarele submulţimi ale lui C, introduse de Yakovlev, care joacă un rol esenţial în descrierea laticială a elementelor unui grup liber şi a multiplicării acestora.

Definiţia 2.2.1 Dacă $a, b \in C$, $A, B \subseteq C$ definim

$$a \circ b = \{x \in C \mid x \vee a = x \vee b = a \vee b\}$$

$$b \uparrow a = \{c \in C(L) \mid c \in (a \circ b) \circ a, c \notin (a \circ a) \circ b, c \circ c \subseteq (a \circ (b \circ b)) \circ a\}.$$

Complexe

În acest paragraf a fost reamintită noţiunea de *a-complex relativ* la un sistem $E = (e_1, \ldots, e_n)$, de elemente ciclice, aşa cum a fost introdusă de Yakovlev. Cu $K(a, E)$ s-a notat mulţimea a-complexelor relative la E. Prin convenţie, $\varepsilon = (\{e_1\}, \ldots, \{e_n\})$ este 0-complexul relativ la E. Aşadar, $K(0, E) = \{\varepsilon\}$. Am notat cu $K(E)$ mulţimea complexelor relative la E. Au fost, de asemenea, prezentate egalitatea complexelor şi multiplicarea a două complexe, în vederea obţinerii unei caracterizări laticeale a produsului a două elemente într-un grup liber.

2.2.2 Laticea subgrupurilor unui grup

Rezultatul prezentat în această secţiune valorifică complexele şi multiplicarea acestora. În anumite condiţii, multiplicarea complexelor dintr-o latice devine operaţie binară pe mulţimea $K(E)$. Mai mult, aceasta defineşte o structură de grup, a cărui latice a subgrupurilor este izomorfă cu laticea iniţială. În această manieră, Yakovlev a reuşit să formuleze condiţiile suficiente pentru ca o latice să fie izomorfă cu laticea subgrupurilor unui grup.

Teorema 2.2.2 [54, Teorema 1], [49, Teorema 7.1.6] *Fie L o latice completă în care orice element este supremum de elemente ciclice. Presupunem că există un sistem $E = (e_1, \ldots, e_n)$ de elemente e_i, cu următoarele proprietăţi:*

(a) Pentru orice $a \in C \setminus \{0\}$, $|K(a, E)| = 2$.

(b) Dacă $a \in C$, $\alpha = (A_1, \ldots, A_n)$, $\alpha' = (A'_1, \ldots, A'_n) \in K(a, E)$, $\alpha \neq \alpha'$ avem

$$e_i \circ A'_j \cap A_i \circ e_j \neq \emptyset, \text{ pentru toţi } i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

c) Dacă $a, b \in C$, $\alpha \in K(a, E)$ şi $\beta \in K(b, E)$ astfel încât $\alpha = \beta$, atunci $a = b$.

d) Pentru toţi $\alpha, \beta \in K(E)$, produsul $\alpha\beta$ constă din unicul complex $\alpha * \beta$.

e) Pentru toţi $\alpha, \beta, \gamma \in K(E)$, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

f) Fie $a \in C$ şi $X \subseteq C$ astfel încât $a \leq \bigvee X$ şi fie $\alpha \in K(a, E)$. Atunci există un număr finit de elemente $b_i \in X$ şi $\beta_i \in K_i(b_i, E)$ astfel încât $\alpha \in ((\ldots(\beta_1\beta_2)\beta_3\ldots)\beta_{m-1})\beta_m$.

Atunci $G = K(E)$ împreună cu operaţia $* : G \times G \to G$ dată de d), $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha * \beta$, $\alpha, \beta \in G$, formează un grup a cărui latice a subgrupurilor este izomorfă cu L.

2.2.3 Grupuri 2-libere

În acest paragraf am reamintit pe scurt noţiunea de grup 2-liber şi principalele proprietăţi ale unui astfel de grup. Ca şi în [54], printr-un grup 2-*liber* s-a înţeles un grup neabelian, cu propritetatea că oricare două elemente ale sale generează un grup liber. Orice grup liber de rang $r \geq 2$, este în particular 2-liber.

Proprietăţi elementare

Au fost prezentate câteva proprietăţile esenţiale ale subgrupurilor generate de două elemente într-un grup 2-liber. Dintre acestea reamintim faptul că dacă $a, b \in G$ avem

i) Dacă $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle \neq 1$, atunci $\langle a, b\rangle$ este ciclic şi $ab = ba$.

ii) Dacă $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = 1$ şi $a \neq 1 \neq b$, atunci $F = \langle a, b\rangle$ este liber peste $\{a, b\}$.

(iii) Dacă $a \neq 1 \neq b$ şi $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = 1$, atunci

$$\langle a\rangle \circ \langle b\rangle = \{\langle ab\rangle, \langle a^{-1}b\rangle, \langle ab^{-1}\rangle, \langle a^{-1}b^{-1}\rangle\}$$

şi toate aceste patru grupuri sunt distincte ([49, Lema 7.1.7]).

Descrierea laticeală a produsului a două elemente

În acest paragraf am prezentat descrierea laticeală a produsului a două elemente ale unui grup 2-liber, oferită de Yakovlev în [54].

Sisteme bazice

În acest paragraf au fost prezentate *sistemele bazice* introduse de către Yakovlev în [54]. În cazul unui astfel de sistem, condiţiile (a)-(f) din ipoteza Teoremei 2.2.2 devin şi necesare pentru laticea subgrupurilor unui grup 2-liber.

După cum era de aşteptat, laticea subgrupurilor unui grup 2-liber (şi în particluar cea a unui grup liber) posedă sisteme bazice, iar faptul că acestea satisfac condiţiile (a)-(f) ale Teoremei 2.2.2, a fost arătat tot de către Yakovlev, în acelaşi articol.

Laticea subgrupurilor unui grup liber

În acest paragraf, am prezentat pe scurt condiţiile formulate de Yakovlev, în care o latice este izomorfă cu laticea subgrupurilor unui grup liber.

Teorema 2.2.3 [54, Teorema 5][49, Teorema 7.1.12] *Fie $r \geq 2$ un număr cardinal. Laticea L este izomorfă cu laticea subgrupurilor unui grup liber de rang r dacă şi numai dacă L este completă, orice element al său este supremum de elemente ciclice, iar L are proprietăţile:*

(a) Pentru orice $c \in C(L) \setminus \{0\}$, intervalul $c/0$ este infinit.

(b) Dacă $a, b \in C(L)$ astfel încât $a \vee b \notin C(L)$ şi $d \in a \circ b$, atunci $d \wedge a = d \wedge b = 0$.

(c) Există un sistem bazic E al lui L şi o submulţime S a lui $C(L)$ astfel încât $|S| = r$, $\bigvee S = \bigvee L$ şi pentru orice şir finit $b_1, \ldots, b_s$, unde $b_i \in S$, cu $b_i \neq b_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, s-1)$, $a_i \in L$ cu $0 \neq a_i \leq b_i$ şi $\alpha_i \in K(a_i, E)$, complexul trivial ε nu este conţinut în $(\ldots((\alpha_1\alpha_2)\alpha_3)\ldots)\alpha_s$,

unde sistemul bazic E satisface (a)-(f) din Teorema 2.2.2.

2.2.4 Subgrupuri normale

În acest paragraf am reamintit descrierea laticeală a subgrupurilor normale ale unui grup 2-liber. Pentru acesta, Yakovlev a oferit o descriere laticeală a conjugatului unui element într-un astfel de grup. Reamintim acest rezultat.

Lema 2.2.4 [49, Lema 7.1.15] *Fie G un grup 2-liber, iar $a, b \in G$ astfel încât $a \neq 1 \neq b$ şi $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$. Atunci*

$$\langle b \rangle \uparrow \langle a \rangle = \{\langle aba^{-1} \rangle, \langle a^{-1}ba \rangle\}.$$

2.3 Laticea subgrupurilor unui grup oarecare

Pentru completitudine, în acestă secţiune, am reamintit caracterizarea laticii subgrupurilor unui grup oarecare. Teorema este o consecinţă naturală a rezultatelor anterioare şi a faptului că orice grup este izomorf cu un grup factor al unui grup liber.

2.4 Condiţii în care o latice este izomorfă cu laticea subgrupurilor unui grup abelian fără torsiune de rang >1

În această secţiune vom schiţa condiţiile formulate de Scoppola, în [50], pentru a caracteriza laticea subgrupurilor unui grup abelian fără torsiune cu rang > 1. Scoppola a folosit tehnici similare celor lui Yakovlev. Pornind de la o latice care satisface anumite condiţii, acesta a construit unicul grup al cărui latice a subgrupurilor este izomorfă cu laticea iniţială.

2.5 Subgrupul comutator

În această secţiune am identificat subgrupul comutator în laticea subgrupurilor unui grup liber. Scopul final a fost determinarea de condiţii necesare şi suficiente pentru ca o latice să fie izomorfă cu laticea subgrupurilor unui grup abelian liber. Ca şi în secţiunile anterioare, s-a lucrat în contextul, mai general, al grupurilor 2-libere.

Primul pas în identificarea subgrupului comutator în laticea unui grup 2-liber, este descrierea laticeală a comutatorului a două elemente. Dacă $a, b \in G$, prin *comutatorul* acestora am înţeles elementul $a^{-1}b^{-1}ab$, pe care îl vom nota de acum înainte cu $[a, b]$. Dacă G este un grup, vom nota cu G' subgrupul său comutator.

Reamintim că $G' = \langle [a,b] \mid a,b \in G \rangle$. Vom introduce în continuare următoarea submulţime a mulţimii elementelor ciclice ale unei latici complete.

Definiţia 2.5.1 [15]Fie L o latice completă. Dacă $x, y \in C(L)$, definim

$$y \updownarrow x = \{z \in C(L) \,|z \in (y \uparrow x) \circ y \text{ şi } \exists t_1, t_2 \in C(L), t_1 \neq t_2, \text{ astfel încât } t_1, t_2 \in x \circ y, z \in t_1 \circ t_2, x \circ x \cap t_1 \circ t_2 = \emptyset\}.$$

Are loc următorul rezultat.

Lema 2.5.2 [15, Lema 2.4] *Dacă G este un grup 2-liber, iar $a, b \in G$ astfel încât $a \neq 1 \neq b$ şi $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$, atunci*

$$\langle b \rangle \updownarrow \langle a \rangle = \{\langle [a,b] \rangle, \langle [a^{-1}, b] \rangle, \langle [a, b^{-1}] \rangle, \langle [a^{-1}, b^{-1}] \rangle\}.$$

Odată ce comutatorul a două elemente a fost caracterizat laticeal, prezentăm următoarele două rezultate ce scot în evidenţă subgrupul comutator în laticea subgrupurilor unui grup 2-liber.

Lema 2.5.3 [15] *Fie G un grup 2-liber şi fie $H \leq G$. Atunci H conţine subgrupul comutator al lui G dacă şi numai dacă $\langle b \rangle \updownarrow \langle a \rangle \subseteq H/1$, pentru toţi $a, b \in G$, astfel încât $a \neq 1 \neq b$ şi $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$.*

Lema 2.5.4 [15] *Fie G un grup 2-liber şi fie $H \leq G$. Atunci H este subgrupul comutator al lui G dacă şi numai dacă*

$$H = \bigvee \Big(\bigcup_{a,b \in G, a \neq 1 \neq b, \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1} \langle b \rangle \updownarrow \langle a \rangle \Big).$$

2.6 Condiţii în care o latice este izomorfă cu laticea subgrupurilor unui grup abelian

În acestă secţiune am formulat condiţiile necesare şi suficiente pentru ca o latice să fie izomorfă cu laticea subgrupurilor unui grup abelian liber. Ne-am folosit de faptul că un grup abelian liber se poate obţine factorizând un grup liber cu comutatorul său.

Teorema 2.6.1 [15] *Fie $r \geq 2$ un număr cardinal. O latice L este izomorfă cu laticea subgrupurilor unui grup abelian liber de rang r dacă şi numai dacă există o latice L^* şi un element $d \in L^*$ cu următoarele proprietăţi:*

a) L^* *este o latice completă în care fiecare element este supremum de elemente ciclice. Mai mult,* L^* *satisface condiţiile (a)-(c) din Teorema 2.2.3, pentru un număr cardinal* r*, unde sistemul bazic* E *satisface în plus condiţiile (a)-(f) din Teorema 2.2.2.*

b) $d = \bigvee(\bigcup_{a,b\in C(L^*)\setminus\{0\},a\wedge b=0} b \updownarrow a)$.

c) $L \cong 1^*/d$*, unde* 1^* *este cel mai mare element al lui* L^*.

Teorema precedentă dă condiţii satisfăcute de laticea subgrupurilor unui grup abelian liber de rang $r \geq 2$, finit sau infinit. Laticea subgrupurilor grupului abelian liber de rang 1 este binecunoscută. Aceasta este laticea T_∞, a numerelor naturale ordonată de relaţia

$$a \leq' b \Leftrightarrow b \text{ divide pe } a.$$

Prezentăm în continuare rezultatul central al acestei secţiuni.

Teorema 2.6.2 [15] *O latice* L *este izomorfă cu laticea subgrupurilor unui grup abelian dacă şi numai dacă* L *este izomorfă cu un filtru principal al laticii* T_∞ *sau există o latice* L^* *şi două elemente* $d, e \in L^*$ *astfel încât:*

a) L^* *şi* $d \in L^*$ *satisfac condiţiile a),b) din ipoteza Teoremei 2.6.1.*

b) $e \in 1^*/d$*, unde* 1^* *este cel mai mare element al lui* L^* *şi* $L \cong 1^*/e$.

2.7 Laticea subgrupurilor normale

În această secţiune am formulat condiţii pentru ca o latice să fie izomorfă cu laticea subgrupurilor normale ale unui grup. Aceasta este o consecinţă directă a rezultatelor lui Yakovlev. Pentru a simplifica lucrurile, am introdus următoarea definiţie.

Definiţia 2.7.1 Fie L o latice completă. Spunem că un element $d \in L$ este *normal* în L şi notăm $d \trianglelefteq L$, dacă $b \uparrow a \subseteq d/0$ are loc pentru orice $a, b \in C(L) \setminus \{0\}$ astfel încât $a \wedge b = 0$ şi $b \leq d$.

Conform rezultatelor lui Yakovlev, elementele normale ale laticii subgrupurilor unui grup 2-liber coincid cu subgrupurile normale ale acestui grup. În continuare, dăm caracterizarea laticii subgrupurilor normale ale unui grup oarecare.

Teorema 2.7.2 [15] *O latice* L *este izomorfă cu laticea subgrupurilor normale ale unui grup dacă şi numai dacă există o latice* L^* *şi un element* $d \in L^*$ *astfel încât:*

a) L^* *este o latice completă în care fiecare element este supremum de elemente ciclice. Mai mult,* L^* *satisface condiţiile (a)-(c) din Teorema 2.2.3, pentru un număr cardinal* $r \geq 2$ *unde sistemul bazic* E *satisface în plus condiţiile (a)-(f) din Teorema 2.2.2.*

b) $d \trianglelefteq L^*$.

c) $\{d' \in L^* \mid d' \trianglelefteq L^*, d \leq d'\}$ *este o sublatice completă a lui* $1^*/d$*, izomorfă cu* L.

Capitolul 3

Proprietăţi de închidere ale laticii subgrupurilor unui grup abelian

În acest capitol vom prezenta câteva proprietăţi de închidere ale clasei $\mathcal{A}$, a laticilor izomorfe cu laticea subgrupurilor unui grup abelian. Deşi simple, aceste proprietăţi nu pot fi găsite în bibliografia existentă. Este binecunoscut faptul că laticile din această clasă sunt compact generate şi modulare.

Vom prezenta proprietăţi de închidere ale clasei $\mathcal{A}$, precum şi ale complementarei acesteia (în clasa tuturor laticilor), în raport cu sublatici, ideale, produse directe, imagini omomorfe, laticea idealelor, respectiv a congruenţelor. Majoritate rezultatelor din acest capitol au fost formulate de către autoarea tezei.

3.1 Sublatici

În această secţiune vom face câteva observaţii legate de sublaticile laticilor din clasa $\mathcal{A}$. S-au construit exemple care au dovedit faptul că: *Dacă $L \in \mathcal{A}$ şi U este o sublatice netrivială a sa, în general $U \notin \mathcal{A}$.* Analog, *Dacă $L \notin \mathcal{A}$, este posibil ca toate sublaticile sale netriviale să aparţină lui $\mathcal{A}$.*

În continuare, am investigat condiţiile în care o latice din $\mathcal{A}$ are proprietatea că toate sublaticile sale complete, sunt tot în $\mathcal{A}$. Inspiraţi de [32], am introdus următoarea definiţie.

Definiţia 3.1.1 O latice completă L este *reuniunea disjunctă a lanţurilor* $C_1, \ldots, C_n \subseteq L$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, dacă următoarele condiţii sunt satisfăcute:

(i) $L = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$,

(ii) pentru orice $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$ avem $C_i \cap C_j = \{0, 1\}$,

(iii) dacă $x \leq y$, atunci există $i \in \{1, \ldots, n\}$ astfel încât $x, y \in C_i$.

De exemplu, pentru un $n \in \mathbb{N}$, laticea $\mathcal{M}_n$ este reuniunea disjunctă a n lanţuri de lungime 2. Dacă o latice L poate fi reprezentată ca reuniune disjunctă de lanţuri, atunci orice sublatice completă a sa are, de asemenea, această proprietate. Am ajuns la următorul rezultat intermediar.

Propoziţia 3.1.2 *Fie L o latice completă. Dacă L nu conţine nicio sublatice izomorfă cu $\mathbf{C}_5$, $\mathbf{D}_5$ sau $\mathcal{M}_5$, atunci L este reuniunea disjunctă a cel mult patru lanţuri.*

În cele din urmă obţinem caracterizarea dorită.

Propoziţia 3.1.3 *Fie $L \in \mathcal{A}$. Atunci orice sublatice completă U a lui L este în $\mathcal{A}$ dacă şi numai dacă L nu conţine nicio sublatice izomorfă cu $\mathbf{C}_5$, $\mathbf{D}_5$ sau $\mathcal{M}_5$.*

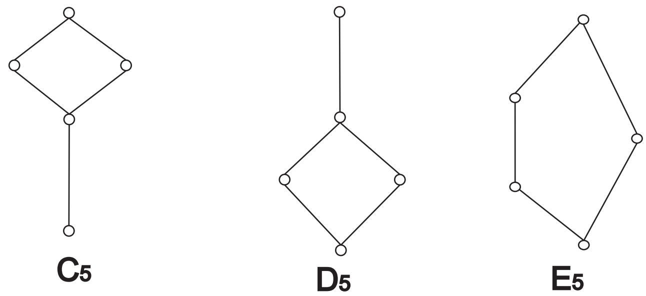

Figura 3.1: Latici cu 5 elemente care nu sunt în $\mathcal{A}$

Rezultatul precedent ne oferă o imagine despre laticile din $\mathcal{A}$ ale căror sublatici complete sunt tot în $\mathcal{A}$. Aceste latici sunt izomorfe fie cu $L(\mathbb{Z}(p^n))$, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fie cu $L(\mathbb{Z}(pq))$, unde p şi q prime distincte, fie cu $L(\mathbb{Z}(2) \oplus \mathbb{Z}(2))$ sau $L(\mathbb{Z}(3) \oplus \mathbb{Z}(3))$.

3.2 Ideale

În această secţiune vom studia proprietăţile de închidere ale lui $\mathcal{A}$ şi ale complementarei sale, faţă de ideale. Ca şi în [16], printr-un *ideal* al unei latici, am înţeles o submulţime a acesteia, închisă faţă de supremumuri finite şi minorante. Un ideal I se numeşte *principal* dacă $I = x/0$, pentru un $x \in L$.

Am ajuns la concluzia că *dacă $L \in \mathcal{A}$ şi I un ideal principal al lui L, atunci $I \in \mathcal{A}$*. Concluzia afirmaţiei anterioare nu are loc dacă idealul nu este principal.

Propoziţia 3.2.1 *Fie $L \in \mathcal{A}$ şi I un ideal al lui L. Atunci $I \in \mathcal{A}$ dacă şi numai dacă I este principal.*

Ca şi o consecinţă directă a lui 3.2.1 are loc următorul rezultat.

Teorema 3.2.2 *Fie $L \in \mathcal{A}$. Orice ideal nevid I al lui L are proprietatea că $I \in \mathcal{A}$ dacă şi numai dacă L satisface condiţia lanţurilor ascendente.*

Este uşor de observat că dacă $L \notin \mathcal{A}$, putem găsi I, un ideal principal al lui L astfel încât $I \in \mathcal{A}$.

3.3 Produse directe

În această secţiune am studiat comportamentul laticilor din clasa $\mathcal{A}$ în raport cu *produsele directe* (de latici). Suzuki a oferit un rezultat fundamental în ceea ce priveşte descompunerea laticii subgrupurilor în produs direct de grupuri coprime ([49, Teorema 1.6.5]). Ca şi o consecinţă, am formulat următoarea propoziţie.

Propoziţia 3.3.1 *Fie L_1, L_2 astfel încât $L_1 \times L_2 \in \mathcal{A}$. Atunci L_1, $L_2 \in \mathcal{A}$.*

De asemenea, am arătat că implicaţia inversă nu are loc.

3.4 Imagini omomorfe

În această secţiune am construit exemple care au dovedit faptul că nici $\mathcal{A}$ şi nici complementara acesteia în calsa tuturor laticilor nu sunt închise faţa de imagini omomorfe.

3.5 Laticea idealelor

În acestă secţiune am studiat laticea idealelor, respectiv a idealelor nevide, ale laticilor din $\mathcal{A}$. Mulţimea idealelor unei latici L, înzestrată cu relaţia de incluziune, formează la rândul său o latice, notată cu $\mathfrak{I}(L)$. Am notat cu $\mathfrak{I}_0(L)$ mulţimea idealelor nevide ale unei latici L. Dacă L are un cel mai mic element, atunci $\mathfrak{I}_0(L)$ este o sublatice completă a lui $\mathfrak{I}(L)$. Acest lucru este valabil când $L \in \mathcal{A}$.

Am arătat că *dacă $L \in \mathcal{A}$, este posibil ca $\mathfrak{I}_0(L) \notin \mathcal{A}$.* Analog, *dacă $L \notin \mathcal{A}$, este posibil ca $\mathfrak{I}_0(L) \in \mathcal{A}$.* De asemenea, am formulat condiţii suficiente ca $L \in \mathcal{A}$ să implice $\mathfrak{I}_0(L) \in \mathcal{A}$.

Propoziţia 3.5.1 *Fie $L \in \mathcal{A}$. Dacă L satisface condiţia lanţurilor ascendente, atunci*

$$\mathfrak{I}_0(L) \in \mathcal{A}.$$

Am construit exemple care au dovedit că *dacă $L \in \mathcal{A}$, este posibil ca $\mathfrak{I}(L) \notin \mathcal{A}$.* De asemenea, am arătat că *dacă $L \notin \mathcal{A}$, este posibil ca $\mathfrak{I}(L) \in \mathcal{A}$.*

Are loc următorul rezultat.

Lema 3.5.2 *Fie $L \in \mathcal{A}$, astfel încât $L \cong L(G)$. Dacă $\mathfrak{I}(L) \in \mathcal{A}$, atunci G este cociclic.*

În cazul lemei anterioare, am arătat că implicaţia inversă nu are loc, în general. În continuare, am formulat condiţii în care $\mathfrak{I}(L) \in \mathcal{A}$.

Propoziţia 3.5.3 *Fie $L \in \mathcal{A}$, astfel încât $L \cong L(G)$. $\mathfrak{I}(L) \in \mathcal{A}$ dacă şi numai dacă G este ciclic şi de ordin putere a unui număr prim.*

3.6 Laticea congruenţelor

În această secţiune vom studia laticea congruenţelor. Am reamintit în prealabil, noţiunile şi rezultatele de bază, referitoare la *congruenţele* unei latici, preluate din [16]. O relaţie de echivalenţă pe o latice L este o *congruenţă* dacă este compatibilă cu supremumuri şi infimumuri.

S-a notat cu $\mathrm{Con}(L)$ mulţimea relaţiilor de congruenţă ale unei latici L. Aceasta este parţial ordonată de relaţia

$$\theta \leq \psi \text{ dacă } a\theta b \text{ implică } a\psi b.$$

Am arătat următorul rezultat.

Propoziţia 3.6.1 *Dacă $L \notin \mathcal{A}$, putem avea $\mathrm{Con}(L) \in \mathcal{A}$.*

Capitolul 4

Latici reprezentabile prin latici de subgrupuri de grupuri abeliene

În acest capitol ne-am ocupat de clasa $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$, a laticilor reprezentabile prin latici de subgrupuri de grupuri abeliene. Aceasta este o clasă mai generală decât $\mathcal{A}$, clasa laticilor izomorfe cu laticea subgrupurilor unui grup abelian, studiată în capitolul anterior. Am notat cu $\mathcal{N}$, respsectiv $\mathcal{N}(\text{rep})$, clasa laticilor izomorfe cu laticea subgrupurilor normale ale unui grup oarecare, respectiv clasa laticilor reprezentabile prin latici din $\mathcal{N}$.

În Secţiunea 4.1 am prezentat un scurt inventar al rezultatelor ce se referă la clasa $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$. În Secţiunea 4.2 am prezentat schematic clasa laticilor cu o reprezentare de tip 1, $\mathcal{T}_1$. Având în vedere faptul că toate laticile din clasele menţionate până acum sunt arguesiene, în Secţiunea 4.3 am reamintit noţiunea de latice arguesiană, introdusă de Jónsson.

Rezultatul central al acestui capitol va fi prezentat în Secţiunea 4.4. Am demonstrat că pentru laticile (modulare) de lungime ≤ 4 avem

$$\mathcal{L}(\mathbf{Z}) = \mathcal{N}(\text{rep}) = \mathcal{T}_1.$$

Acest rezultat a fost obţinut de G. Călugăreanu împreună cu autoarea tezei în [14].

4.1 Varietăţi de latici. Cvasi-varietăţi de latici

În această secţiune vom reaminti noţiunile de *varietate*, respectiv *cvasi-varietate* de latici. În Capitolul 3 am văzut că $\mathcal{A}$ nu este închisă nici faţă produse directe, nici faţă de sublatici sau imagini omomorfe. Aşadar, $\mathcal{A}$ nu este o varietate, adică clasa tuturor laticilor satisfacând orice ecuaţie dintr-o mulţime Σ, sau echivalent, conform rezultatului lui Garrett Birkhoff (1934), închisă faţă de imagini omomorfe, sublatici şi produse directe. Noţiunea de cvasi-varietate este mai generală decât cea de varietate. Se observă, totuşi că $\mathcal{A}$ nu este nici măcar o cvasi-varietate. Am făcut un scurt inventar al rezultatelor (ce folosesc diverse abordări) şi afirmă că $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ este o cvasi-varietate.

Rămâne o problemă deschisă: *este cvasi-varietatea generată de clasa* $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ *o varietate? Cu alte cuvinte, dacă o latice L poate fi scufundată într-o latice a subgrupurilor unui grup abelian, se poate spune acelaşi lucru despre laticile factor ale acesteia?*

4.2 Latici de tipul 1

În această secţiune am prezentat pe scurt laticile de tipul 1, respectiv cu o reprezentare de tip 1, introduse de Jónsson. Laticile de tip 1 (sau liniare) sunt latici izomorfe cu laticea echivalenţelor unei mulţimi, ce permută. Clasa acestora a fost notată cu $\mathcal{L}$. O latice cu o reprezentare de tip 1, se scufundă într-o latice din $\mathcal{L}$. Clasa acestora am notat-o cu $\mathcal{T}_1$.

Jónsson a demonstrat că orice latice care admite o reprezentare de tip 1 este modulară. Congruenţele induse de subgrupuri normale comută, aşadar toate laticile de subgrupuri normale sunt liniare, adică $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}$.

Rămâne deschisă următoarea întrebare: *este* $\mathcal{T}_1$ *o varietate?*

4.3 Latici arguesiene

În acestă secţiune am prezentat pe scurt *laticile arguesiene*, introduse de Jónsson în 1954. În [36] s-a arătat că această identitate este echivalentă cu o implicaţie ce reflectă în mod natural enunţul teoremei lui Desargues din geometrie.

Este binecunsocut faptul că $\mathcal{A} \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{L}$ şi $\mathcal{L}(\mathbf{Z}) \subset \mathcal{N}(\text{rep}) \subset \mathcal{T}_1$. Mai mult, laticile din aceste clase sunt arguesiene. Niciuna dintre aceste incluziuni nu este o egalitate. În [33], Jónsson, a arătat că $\mathcal{N} \subsetneq \mathcal{L}$, iar Pálfy şi Csaba Szabo au construit în [42] un exemplu ce dovedeşte că $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{N}$. Combinând rezultatele lui Birkhoff, Frink, Schutzenberger şi Jónsson obţinem următorul rezultat.

Teorema 4.3.1 *Dacă L este o latice geomodulară, atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

(i)$L \in \mathcal{A}$*; (ii)*$L \in \mathcal{N}$*; (iii)*$L \in \mathcal{L}$*; (iv)*L *este arguesiană.*

În [33], Jónsson a extins teorema anterioară şi a arătat că în prezenţa complementării, cele două concepte, reprezentarea de tip 1 şi identitatea arguesiană, devin echivalente.

Teorema 4.3.2 [16] *Dacă L este o latice complementată (modulară), atunci următoarele condiţii sunt echivalente: (i)$L \in \mathcal{L}(\mathbf{Z})$; (ii) $L \in \mathcal{T}_1$; (iii) L este arguesiană.*

În cele ce au urmat, ne-am concentrat atenţia asupra laticilor de dimensiuni mai mici.

4.4 Latici cu reprezentare de tip 1, de lungime $\leq$ 4

În această secţiune am arătat că egalitatea $\mathcal{L}(\mathbf{Z}) = \mathcal{N}(\text{rep}) = \mathcal{T}_1$ are loc pentru latici (modulare) de dimensiune (într-o terminologie mai nouă, lungime) ≤ 4. Aceasta este ultima contribuţie originală a autoarei, prezentată în această teză, realizată împreună cu G. Călugăreanu (vezi [14]).

Aceast subiect poate fi corelat şi cu următoarea problemă deschisă: *în ce condiţii este o cvasi-varietate o varietate?* Pentru clase precum $\mathcal{L}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{N}(\text{rep})$ şi $\mathcal{T}_1$ am văzut că răspunsul nu este cunoscut. Deoarece studiul nostru va arăta că pentru latici de lungime cel mult 4, toate aceste clase coincid cu laticile arguesiene, şi având în vedere că acestea formează o varietate, vom încuraja un răspuns afirmativ.

Latici modulare de lungime $\leq$ 4

În [35], Jónsson a reprezentat prin diagrame, chiar dacă schematic, toate laticile modulare de lungime ≤ 4. De vreme ce lucrăm în acelaşi context, am reamintit cele mai importante rezultate din [35].

O latice de lungime 0 constă dintr-un singur element $0 = 1$, pe când una de lungime 1 este lanţul cu două elemente. O latice de lungime 2 este izomorfă cu $\mathcal{M}_n$, dacă are n atomi. Deoarece ce supremumul a doi atomi distincţi este întotdeauna 1, iar infimumul 0, o astfel de latice este complet determinată până la un izomorfism, de numărul de atomi.

Observaţia 4.4.1 Dacă A şi A' sunt latici de lungime 2, iar A' are cel puţin atâtea elemente cât şi A, atunci A este izomorfă cu o sublatice a lui A'. Într-adevăr, dacă p este un atom al lui A, iar p' este un atom al lui A', atunci există un izomorfism de la A la A' astfel încât $f(p) = p'$.

Toate aceste latici sunt complementate, aşadar egalităţile

$$\mathcal{A} = \mathcal{N} = \mathcal{L} \text{ şi } \mathcal{L}(\mathbf{Z}) = \mathcal{N}(\text{rep}) = \mathcal{T}_1$$

au loc conform teoremelor 4.3.1 şi 4.3.2. Cazul laticilor de lungime ≤ 2 se încheie aici.

Cu s s-a notat soclul (supremumul atomilor), iar cu r radicalul (infimumul coatomilor) unei latici. Deoarece o latice modulară de lungime finită este complementată dacă şi numai dacă 1 este soclul său (dacă şi numai dacă 0 este radicalul său), condiţiile $\delta(s) = n$ şi $\delta(r) = 0$ sunt echivalente şi implică faptul că A este complementată.

Dacă $\delta(s) = 1$, atunci s este un atom al lui A şi de fapt s este singurul atom al lui A. În acest caz A este complet determinată de sublaticea sa $1/s$, de lungime $n-1$. Similar, dacă $\delta(r) = n-1$, atunci studiul lui A se reduce la studiul sublaticii sale $r/0$, de lungime $n-1$. În consecinţă ne-am ocupat aici de cazurile în care $1 < \delta(s) < n$ şi $0 < \delta(r) < n-1$.

Dacă $n = 3$, atunci doar cazul în care $\delta(s) = 2$ şi $\delta(r) = 1$ ar trebui luat în considerare, pe când dacă $n = 4$, am considerat cazurile $\delta(s) \in \{2, 3\}$ şi $\delta(r) \in \{1, 2\}$. Aşadar, s-au distins doar următoarele două situaţii:

Teorema 4.4.2 [35] *Pentru* $n = 3, 4$, *dacă* $0 < \delta(r) < \delta(s) < n$, *atunci* $r < s$ *şi* $A = s/0 \cup 1/r$.

Teorema 4.4.3 [35] *Pentru* $n = 4$, *dacă* $\delta(s) = 2$ *şi* $\delta(r) = 2$, *atunci* $s/0 \cup 1/r = A - X$, *unde* X *este mulţimea elementelor ireductibile* $x \in A$, *cu* $\delta(x) = 2$. *Mai mult, fiecare element al lui* X *acoperă un singur atom şi este acoperit de un singur coatom. Două elemente acoperă acelaşi atom dacă şi numai dacă sunt acoperite de acelaşi coatom. În final, dacă* $s \neq r$, *atunci* $s \wedge r$ *este un atom acoperit de* r, $s \vee r$ *este un coatom care îl acoperă pe* s *şi* $s \wedge r \prec x \prec s \vee r$, *pentru orice element* $x \in X$.

4.4.1 Latici de lungime 3 şi 4

Am văzut deja că o latice modulară de lungime 3, care nu este complementată, este izomorfă cu o latice de forma celei modelate in Figura 4.1 (în care s nu este atom, iar r nu este coatom).

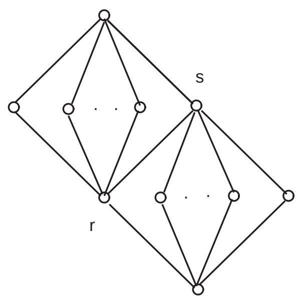

Figura 4.1: Familie de latici de lungime 3

Pentru simplitate, s-a spus că în Figura 4.1, am reprezentat laticea $\mathcal{M}_n$ "peste" $\mathcal{M}_m$. Vom nota o astfel de latice cu $\mathcal{M}_n/\mathcal{M}_m$. De vreme ce laticea unui grup abelian finit este autoduală, dacă $m \neq n$, atunci $\mathcal{M}_n/\mathcal{M}_m \notin \mathcal{A}$. Mai mult, se poate arăta că doar $\mathcal{M}_{p+1}/\mathcal{M}_{p+1} = L(\mathbb{Z}(p) \oplus \mathbb{Z}(p^2)) \in \mathcal{A}$, unde p este număr prim.

Au loc următoarele rezultate în ceea ce priveşte laticile de lungime 3.

Teorema 4.4.4 [14] *Orice latice modulară de lungime 3, care nu este complementată, aparţine lui* $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$.

Corolarul 4.4.5 [14] *Pentru latici de lungime* ≤ 3, *egalitatea* $\mathcal{L}(\mathbf{Z}) = \mathcal{N}(\mathrm{rep}) = \mathcal{T}_1$ *are loc.*

Pentru a încheia studiul nostru, am observat că o latice modulară, de lungime 4, care nu este complementată, este izomorfă cu una dintre laticile din Figura 4.2 (pentru $r \neq s$) sau cu o latice din familia de latici reprezentată în Figura 4.3 (pentru $r = s$).

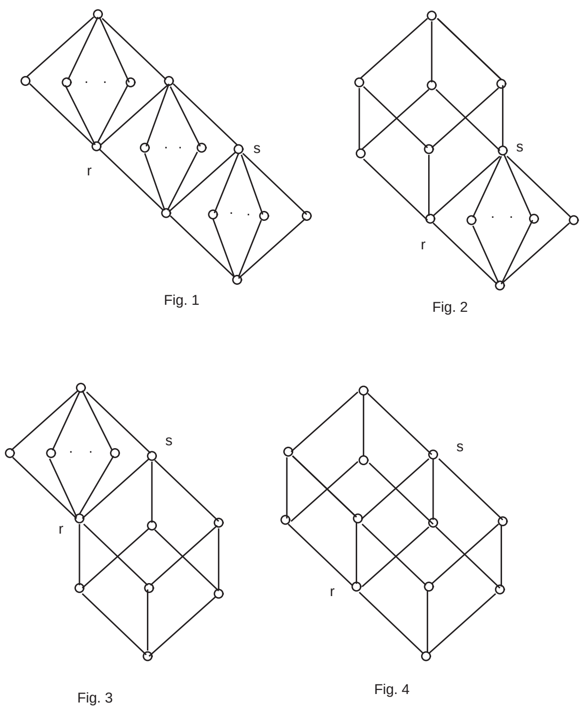

Figura 4.2: Familii de latici de lungime 4 cu $r \neq s$

Un caz particular (pentru $n = 2, 3$) al acestor diagrame poate fi găsit în [35], dar figura prezentată acolo este incompletă. Folosindu-ne din nou de faptul că laticea subgrupurilor unui grup abelian finit este autoduală, observăm că majoritatea laticilor din figura de mai sus nu sunt în $\mathcal{A}$.

Are loc următorul rezultat, în ceea ce priveşte laticile de lungime 4.

Teorema 4.4.6 [14] *Orice latice modulară de lungime 4 care nu este complementată aparţine lui* $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$.

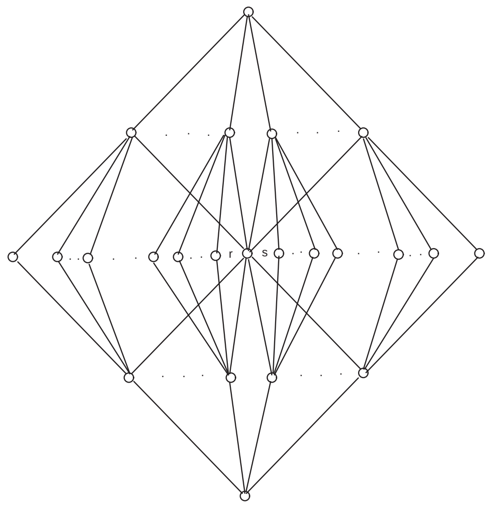

Fig. 5

Figura 4.3: O famile de latici de lungime 4 cu $r = s$

În cele din urmă, suntem pregătiţi să oferim rezultatul dorit.

Corolarul 4.4.7 [14] *Pentru o latice de lungime* ≤ 4*, următoarele patru proprietăţi sunt echivalente:*

(i) este reprezentabilă prin grupuri abeliene;

(ii) este reprezentabilă prin latici de subgrupuri normale;

(iii) este reprezentabilă prin latici liniare;

(iv) este arguesiană.

Observaţia 4.4.8 Egalitatea $\mathcal{A} = \mathcal{N}$ nu are loc în cazul laticilor de lungime ≤ 4. Într-adevăr, laticea subgrupurilor normale ale grupului cuaternionilor, Q_8, este un exemplu simplu.

Dacă $\mathcal{N} = \mathcal{L}$ pentru latici (modulare) de lungime ≤ 4, rămâne o problemă deschisă.

Bibliografie

[1] Arnold, D., *Finite Rank Torsion-Free Abelian Groups and Rings*, Lecture Notes in Math. 931, Springer - Verlag, New-York, 1982.

[2] Baer, R., *The significance of the system of subgroups for the structure of the group*, Amer. Journ. Math, 61 (1939), 1-44.

[3] Baer, R., *Crossed isomorphisms*, Amer. J. Math., 66 (1944), 341–404.

[4] Benabdallah, K., Piché, C., *Lattices related to torsion abelian groups*. Mitt. Math. Sem. Giessen, No. 197 (1990), vi+118 pp.

[5] Brandl, R., *On groups with certain lattices of normal subgroups*, Arch. Math. (Basel), 47 (1986), 6–11.

[6] Breaz, S., *Commutativity conditions using normal subgroup lattices*, va apare în Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.

[7] Breaz, S., *On a class of mixed groups with semi-local $WALK$-endomorpism ring*, Comm. Algebra 30 (2002), 4473–4485.

[8] Breaz, S., Călugăreanu, G., *Every Abelian group is determined by a subgroup lattice*, Stud. Sci. Math. Hung., 45 (2008), 135–137.

[9] Breaz, S., **Conţiu, C.**, *Groups which are determined by subgroup lattices*, Acta Universitatis Apulensis, Special Issue, 2009, 449-463

[10] Burris, S., Sankappanavar,H. P., *A Course in Universal Algebra*, disponibil on-line la adresa http://www.math.uwaterloo.ca/ snburris/htdocs/ualg.html.

[11] Călugăreanu, G., *Abelian groups with semilocal endomorphism rings*, Comm. Algebra, 30 (2002), 4105 - 4111.

[12] Călugăreanu, G., *Abelian groups determined by subgroup lattices of direct powers*, Arch. Math. (Basel), 86 (2006), 97–100.

[13] Călugăreanu, G., Rangaswamy, K. M., *A solution to a problem on lattice isomorphic Abelian groups*, in Models, Modules and Abelian Groups, In Memory of A.L.S. Corner, de Gruyter 2008, 249-256 .

[14] Călugăreanu, G., **Conţiu, C.**, *On type 1 representable lattices of dimension less or equal than 4*, va apare în Algebra Universalis, 2011.

[15] **Conţiu, C.**, *Conditions under which a lattice is isomorphic to the subgroup lattice of an abelian group*, va apare în Carpathian Journal of Mathematics.

[16] Crawley P., Dilworth R.P., *Algebraic Theory of Lattices, Prentice-Hall*, Englewood Cliffs, N.J., 1973.

[17] Curzio, M., *Una caratterizzazione reticolare dei gruppi abeliani*, Rend. Math. e Appl., 24 (1965), 1–10.

[18] Davey B. A., Priestley, H. A., *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, 2002.

[19] A. Day, C. Herrmann, B. Jónsson, J. B. Nation, D. Pickering D., *Small non-Arguesian lattices*. Algebra Universalis 31 (1994), no. 1, 66–94.

[20] Facchini, A., *Module theory. Endomorphism rings and direct sum decompositions in some classes of modules*, Progress in Mathematics 167, Birkhäuser, Basel, 1998.

[21] Fuchs, L., *Infinite Abelian Groups*, Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 1958.

[22] Fuchs L., *Infinite Abelian Groups*, vol.I, Academic Press, New-York and London, 1970.

[23] Goodearl, K., *Power cancellation of groups and modules*, Pacific J. Math., 64 (1976), 387–411.

[24] Haiman, M., *Arguesian lattices which are not linear*, Bull. Amer. Math. Soc., 16 (1987), 121-124.

[25] Herrmann, C., Poguntke, W., *Axiomatic classes of lattices of normal subgroups*, Technische Hochschule Darmstadt Preprint, no. 12, Darmstadt, West Germany, 1972.

[26] Hirshon, R., *On cancellation in groups*, Amer. Math. Monthly, 76 (1969), 1037–1039.

[27] Hirshon, R., *The cancellation of an infinite cyclic group in direct products*, Archiv der Mathematik 26, (1975), 134–138.

[28] Hutchinson, G., *Modular lattices and abelian categories*, J. Algebra 19 (1971), 156-184.

[29] Hutchinson, G., *The representation of lattices by modules*, Bull. Amer. Math. Soc., 79 (1973), 172-176.

[30] Kearnes, K.A., Sendrei, Á., *Groups with identical subgroup lattices in all powers*, J. Group Theory, 7 (2004), 385–402.

[31] Iwasawa, K., *On the structure of infinite M-groups*, Jap. J. Math, 18 (1943), 709-728.

[32] Jez, A., *Subgroup lattices that are chains*, Rose-Hulman Undergraduate Math-Journal, 7 (2006).

[33] Jónsson, B., *Modular lattices and Desargues theorem*, Math. Scand., 2 (1954), 295-314.

[34] Jónsson, B., *On the representation of lattices*, Math. Scand., 1 (1953), 193-206.

[35] Jónsson, B., *Arguesian lattices of dimension $n \leq 4$*, Math. Scand., 7 (1959), 131-145.

[36] Jónsson, B., Monk, G.S., *Representations of primary Arguesian lattices*, Pacific J. of Math., 29 (1969), 95-140.

[37] Nation, J.B., *Notes on Lattice Theory*, unpublished course notes, disponibil on-line la adresa http://www.math.hawaii.edu/ jb/.

[38] Lukács, E., Pálfy, P.P., *Modularity of the subgroup lattice of a direct square.* Arch. Math. (Basel), 46 (1986), 18–19.

[39] Makkai, M., McNulty, G., *Universal Horn axiom systems for lattices of submodules*, Algebra Universalis, 7 (1977) 25-31

[40] Ore, O., *Structures and group theory. I-II*, Duke. Math, Journ., 3 (1937), 149-174.

[41] Pálfy, P. *Intervals in subgroup lattice of finite groups*, Groups'93 Galway/St Andrews, vol.2, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol 212, Cambridge University Press, Cambridge, (1995) 482-494.

[42] Pálfy, P., Szabó, Cs., *An identidy for subgroup latiices of abelian groups*, Algebra Universalis, 33 (1995), 191-195.

[43] Pálfy, P., *Groups and lattices*, London Math. Soc. Lecture Notes Ser., vol. 305, Cambridge University Press (2003), 428-454

[44] Pouzet, M., Rival, I., *Quotients of complete oredred sets*, Algebra Universalis, 17 (1983), 393-405.

[45] Rottlaender, A., *Nachweis der Existenz nicht-isomorpher Gruppen von gleicher Situation der Untergruppen*, Math Z, 28 (1928), 641-653.

[46] Sato, S., *Note on the lattice isomorphisms between Abelian groups and non-Abelian groups*, Osaka Math. J., 3 (1951), 215–220.

[47] Schein, B.M., *Relation algebras and function semigroups*, Semigroup Forum, 1 (1970), no. 1, 1-62.

[48] Schmidt, E.T., *The ideal lattice of a distributive lattice with 0 is the congruence lattice of a lattice*, Acta Sci. Math. (Szeged)., 43 (1981), 153-168.

[49] Schmidt, R., *Subgroup lattices of groups, de Gruyter Expositions in Mathematics*, 14, de Gruyter, Berlin, 1994.

[50] Scoppola, C.M., *On the lattice of subgroups of a torsion-free abelian group of rank different from* 1*: a lattice characterization.* (Italian) Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 65 (1981), 205-221.

[51] Scoppola, C.M., *A lattice-theoretic characterization of the lattice of subgroups of an abelian group containing two independent aperiodic elements.* (Italian) Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 73 (1985), 191-207.

[52] Street, A.P., *Subgroup-determining functions on groups*, Ill. J. Math., 12 (1968), 99–120.

[53] Suzuki, M., *Structure of a Group and the Structure of its Lattice of Subgroups*, Springer Verlag, 1956.

[54] Yakovlev, B. V., *Conditions under which a lattice is isomorphic to the lattice of subgroups of a group.* (Russian) Algebra i Logika, 13 (1974), no. 6, 694-712, 720.

[55] Walker, E.A., *Cancellation in direct sums of groups*, Proc. A.M.S., 7, (1956), 898-902